1. Учительница продиктовала Вовочке угловые коэффициенты и свободные члены трёх разных линейных функций, графики которых параллельны. Невнимательный Вовочка при записи каждой из функций поменял местами угловой коэффициент и свободный член и построил графики получившихся функций. Сколько могло получиться точек, через которые проходят хотя бы два графика?

(*«Линейные графики», А. Пешнин*)

Ответ: У графиков 1 точка пересечения.

Решение: Уравнение линейной функции имеет вид $y = ax+b$, где a — угловой коэффициент, b — свободный член. График линейной функции — прямая. Графики двух линейных функций параллельны, когда угловой коэффициент у них одинаков, а свободные члены различны. Если поменять местами угловой коэффициент и свободный член, то у полученных функций свободный член будет одинаков, обозначим его c. Значит, при $x = 0$ эти функции принимают одно и то же значение $y = c$, т.е. их графики проходят через точку $(0; c)$. Так как две различные прямые не могут пересекаться более чем в одной точке, других точек пересечения нет.

2. На урок физкультуры пришло 12 детей, все разной силы. Учитель 10 раз делил их на две команды по 6 человек, каждый раз новым способом, и проводил состязание по перетягиванию каната. Могло ли оказаться так, что все 10 раз состязание закончилось вничью (то есть суммы сил детей в командах были равны)?

(*«Перетягивание каната», М. Евдокимов*)

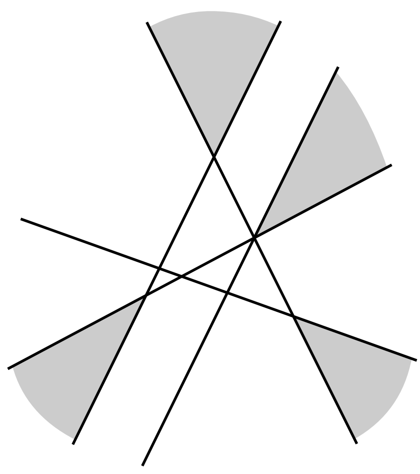
Решение: Да, могло быть. Пусть силы детей равны 1, 2, $\ldots$, 12. Предъявим 10 возможных разбиений детей на две команды с равными силами. Тогда при каждом таком разбиении будет зафиксирована ничья.

Разобьём детей на пары с суммарной силой 13: $(1, 12)$, $(2, 11)$, $(3, 10)$, $(4, 9)$, $(5, 8)$, $(6, 7)$. Пусть в первой команде всегда будет пара $(1, 12)$ и ещё какие-то две из оставшихся пяти пар. При этом остальные три пары образуют вторую команду. Тогда суммарная сила каждой команды будет равна $3 \cdot 13 = 39$.

Две пары из пяти возможных пар можно выбрать $\frac{5\cdot4}{2} = 10$ возможными способами. Таким образом, мы получили 10 возможных разбиений на команды с равными силами.

3. Плоскость разбита на части несколькими прямыми, среди которых есть непараллельные. Те части, граница которых состоит из двух лучей, закрасили. После этого проведена ещё одна прямая. Докажите, что, независимо от положения новой прямой, по обе стороны от неё найдутся закрашенные точки.

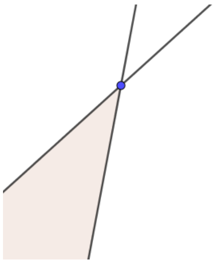
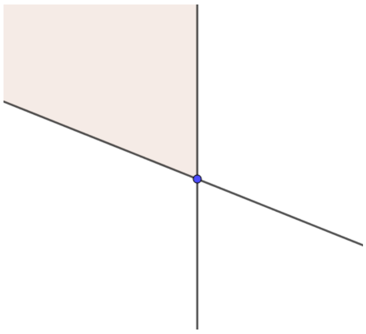
Пример расположения прямых (без последней прямой) изображен на рисунке.



(*«Зоногон», А. Устинов, А. Юран*)

Решение: Введём систему координат так, чтобы новая прямая была осью OY. Рассмотрим самую левую точку пересечения нескольких прямых.

Теперь посмотрим на лучи этих прямых, идущие от этой точки пересечения влево. Выберем какие-нибудь два соседних из них. Если через точку проходит всего две прямые и одна из них параллельна OY, то посмотрим на её верхний луч. Заметим, что на этих лучах нет точек пересечения с другими прямыми (иначе бы нашлась точка пересечения левее нашей, либо с такой же координатой по OX, но выше). Значит, этот угол образован двумя лучами, т. е. все его точки закрашены.

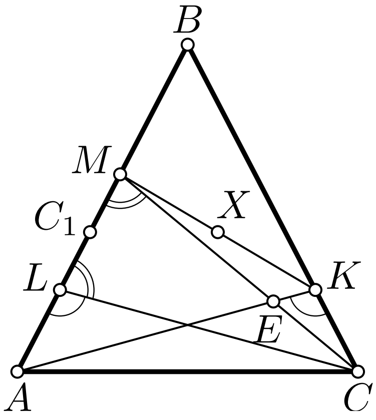
 

Понятно, что этот угол уходит на бесконечность влево, поэтому, как бы ни была расположена ось OY, где-то слева от неё будут закрашенные точки. Аналогичные рассуждения можно проделать, рассмотрев самую верхнюю из самых правых точек пересечения прямых. Таким образом, по обе стороны от прямой OY найдутся закрашенные точки.

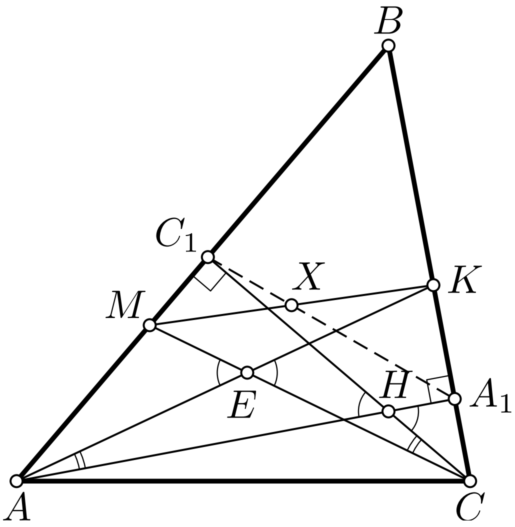
4. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного остроугольного треугольника ABC выбраны точки M и K. Отрезки CM и AK пересекаются в точке E. Оказалось, что $\angle MEA = \angle ABC$. Докажите, что середины всевозможных отрезков MK лежат на одной прямой.

(*М. Волчкевич*)

Решение: Покажем, что X – середина MK – лежит на прямой A_1C_1, соединяющей основания высот AA_1, CC_1. Без ограничения общности $AM > CK$ (если $AM \neq CK$), также считаем $K \neq C$. Так как $\angle AEM = \angle ABC$, из суммы углов четырехугольника $MBKE$ получаем $\angle AMC + \angle AKC = 180°$. Отметим на отрезке AB точку L такую, что $AL = CK$. Из равенства треугольников ALC и CKA (по двум сторонам: $AL = CK, AC$ общая и углу между ними: $\angle LAC = \angle KCA$) получаем $\angle ALC = \angle AKC$. Тогда $\angle MLC = \angle LMC$, т.е. $\triangle LMC$ равнобедренный. Значит, C_1 – середина LM. По теореме Фалеса для прямых LK и AC и $\angle ABC$ получаем $LK||AC$. Т.к. C_1X – средняя линия $\triangle LMK$, $C_1X||LK$. Значит, $C_1X||AC$. Заметив, что в равнобедренном треугольнике $C_1A_1||AC$, получаем $X \in C_1A_1$, что и требовалось. Случай, когда $K = C$, разбирается аналогично общему. В случае $AM = CK$ имеем $M = C_1, K = A_1$ и утверждение очевидно.



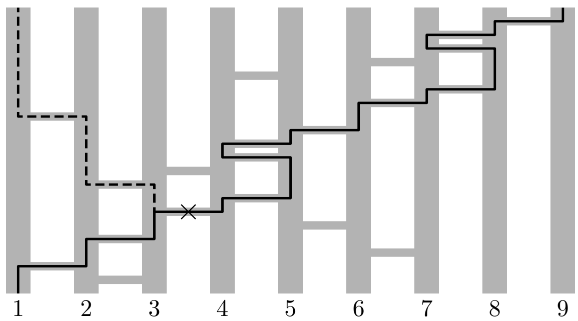
Решение 2: Обозначим $X = KM \cap C_1A_1$, где A_1, C_1 – основания высот AA_1, CC_1. По теореме Менелая для $\triangle MBK$ и секущей A_1C_1 получаем $\frac{MC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{KA_1} \cdot \frac{KX}{XM} = 1$. Так как $\angle AEM = \angle ABC$, из суммы углов четырехугольника $MBKE$ получаем $\angle BMC = \angle AKC$. Треугольники AKA_1 и CMC_1 подобны по двум углам, отсюда: $\frac{MC_1}{KA_1} = \frac{CC_1}{AA_1}$. Треугольники ABA_1 и CBC_1 подобны по двум углам, отсюда: $\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{AA_1}{CC_1}$. Поделив первое равенство на второе и третье, получим $KX = XM$, т.е. середина отрезка MK лежит на прямой A_1C_1. В решении используется, что одна из точек M, K лежит на продолжении BC_1 или BA_1 (без ограничения общности – точка M), а другая – на самом отрезке (без ограничения общности – точка K), либо M, K совпадают с C_1, A_1 – тогда утверждение очевидно. Это следует из утверждения $\angle BMC = \angle AKC$ (доказывается без использования расположения точек).



Замечание: Утверждение задачи верно и для прозвольного $\triangle ABC$. В частности, мы не пользовались равнобедренностью во втором решении.

5. В ряд стоят 9 вертикальных столбиков. В некоторых местах между соседними столбиками вставлены горизонтальные палочки, никакие две из которых не находятся на одной высоте. Жук ползёт снизу вверх; когда он встречает палочку, он переползает по ней на соседний столбик и продолжает ползти вверх. Известно, что если жук начинает внизу первого столбика, то он закончит свой путь на девятом столбике. Всегда ли можно убрать одну из палочек так, чтобы жук в конце пути оказался наверху пятого столбика?

Например, если палочки расположены как на рисунке, то жук будет ползти по сплошной линии. Если убрать третью палочку на пути жука, то он поползёт по пунктирной линии.



(*«Жуки», Г. Караваев*)

Версия – 1 **Ответ:** Да, всегда. **Решение:** Заметим, что если мы посадим по жуку на основание каждого столбика и отправим ползти наверх с одинаковой постоянной скоростью по нашим правилам (при этом по палочкам они будут переползать мгновенно), жуки на горизонтальных палочках будут меняться местами, и никакие два жука не окажутся на одном столбике в одно и то же время. Значит, на вершине каждого из столбиков в конце будет по жуку. Назовём жука, стартовавшего с первого столбика, красным, а того, кто финиширует на вершине центрального столбика, зелёным. Заметим, что красный жук стартует левее зелёного, а финиширует правее. Значит, хотя бы на одной из палочек они меняются местами. Уберём эту палочку: тем самым мы перенаправим красного жука по маршруту зелёного, чем и добьёмся желаемого.

Версия – 2 **Ответ:** Да, всегда. **Решение:** Заметим, что по любому участку пути (как горизонтальному, так и вертикальному) весь дальнейший и предыдущий маршрут восстанавливается однозначно. Отправим одного жука как положено (от низа первого столбика), а второго жука отправим ползти с вершины пятого столбика (он ползёт сверху вниз, также переползая по всем доступным палочкам). Траектории этих жуков где-то пересекутся, потому что траектория первого жука идёт из левой нижней в правую верхнюю точку, а траектория второго, где бы она ни закончилась — сверху вниз. Если они пересеклись по какому-то вертикальному участку, то жук, ползущий снизу вверх, далее должен был бы повторить начальный путь жука, ползущего сверху вниз, т.е. закончил бы путь на 5 палочке. Но мы знаем, что он закончил на 9 палочке. Аналогично, если они пересеклись по горизонтальной палочке, пройдя ее в разных направлениях, то жук, ползущий снизу вверх, повторил бы начальный путь жука, ползущего сверху вниз, т.е. закончил бы путь на 5 палочке, а не на 9. Значит, они пересеклись по горизонтальной палочке, причём оба прошли её в одном направлении (один на пути снизу вверх, другой на пути сверху вниз). Уберём эту палочку: тем самым мы перенаправим первого жука по маршруту, обратному маршруту второго, чем и добьёмся желаемого.

6. Вася выбрал 100 различных натуральных чисел из множества $1, 2, 3, \ldots, 120$ и расставил их в некотором порядке вместо звёздочек в выражении (всего 100 звёздочек и 50 знаков корня)

$$\sqrt{(*+*)\cdot\sqrt{(*+*)\cdot\sqrt{\ldots\sqrt{*+*}}}}$$

Могло ли значение полученного выражения оказаться целым числом?

(*«Звёздочки», (М. Евдокимов)*)

Ответ: Да, могло.

Решение:

Составителям известны примеры, построенные по следующей схеме (но, возможно, существуют иные). Пример строится справа налево. Сначала вместо нескольких последних звёздочек подбираются числа так, чтобы после извлечения очередного корня получалось целое число n (они образуют так называемый «хвост» нашего выражения). Все дальнейшие суммы звёздочек также делаются равными n (их мы можем заполнить в силу выбора n таким, чтобы количество доступных пар чисел, дающих в сумме n было достаточно большим). Тогда значение выражения будет равно n.

В следующем выражении через A обозначен «хвост» — цепочка вложенных корней, значение которой равно n^2. Таким образом $\sqrt{A} = n$ и всё выражение равно n:

$$n = \sqrt{n\sqrt{n\ldots\sqrt{n\sqrt{A}}}}$$

Отдельно заметим, что при вычислении значения выражения после извлечения каждого радикала должно получаться целое число.

- В простейшем известном примере в качестве n можно выбрать любое число вида $8k$:

$$8k = \sqrt{8k\sqrt{8k\ldots\sqrt{8k\sqrt{16k\sqrt{16k\sqrt{k^2}}}}}}.$$

  Нужный пример можно построить, выбрав $k = 14$. Для самых правых чисел выберем следующие представления:

$$k^2 = 196 = 100 + 96, \qquad 16k = 224 = 120 + 104 = 119 + 103.$$

  После этого остаётся найти 47 различных представлений для числа $8k = 112$. Всего существует 55 таких представлений:

$$112 = 1 + 111 = 2 + 110 = \ldots = 55 + 57.$$

  Из-за того, что ранее были использованы числа 96, 100, 103 и 104, из 55 представлений четыре становятся невозможными. Значит, остаётся 51 представление, которых хватает для того, чтобы заполнить оставшиеся 47 мест.

- В следующем примере $n = 120$. А последние четыре суммы нужно подобрать так, чтобы их корень давал не $n^{15/16}$, а n. Положим вместо последних четырех сумм звездочек $101 + 99$, $120 + 96$, $100 + 44$, $1 + 15$. Остается заметить, что выбранные числа испортили не более восьми сумм 120 (на самом деле семи). Тогда из 59 имевшихся сумм $(1 + 119, 2 + 118, \ldots, 59 + 61)$ мы сможем на оставшиеся места выбрать $50 - 4 = 46$ необходимых сумм.

$$\sqrt{(16+104)\sqrt{(2+118)\cdot\sqrt{\ldots\sqrt{(101+99)\sqrt{(120+96)\sqrt{(100+44)\sqrt{(1+15)}}}}}}}$$

- В следующем примере $n = 144$. Всего есть 48 пар, дающих в сумме 144 (от $71 + 73$ до $24 + 120$), при этом числа $25, 59, 107, 109, 119, 120$ из хвоста портят 6 пар. Итого имеем $48 - 6 = 42$ пары в основной части и 8 в хвосте, всего 50, что и требовалось.

$$\sqrt{(71+73)\sqrt{\dots\sqrt{(107+109)\sqrt{(25+119)\sqrt{(8+120)\sqrt{(5+59)\sqrt{(15+17)\sqrt{(4+12)\sqrt{(2+6)\sqrt{(1+3)}}}}}}}}}}$$